



★今週の1題★ 小数・分数 ～解説～

◎ 予備知識

一般的に、純循環小数は次のような分数で表せることが知られています。

$$0.AAA\dots = \frac{A}{9}, \quad 0.ABABAB\dots = \frac{AB}{99}, \quad 0.ABCABCABC\dots = \frac{ABC}{999}, \quad \dots$$

(1) Zは6個の数字の循環なので、分母が「999999」の分数で表すことができます。

999999を素因数分解すると、

$$999999 = 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$

となります。このことから、999999の約数で一桁の整数は、

(1, 3, 7, 9)

の4数で、これらを分母として分母が1の分数は

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1}{3} = 0.333\dots, \quad \frac{1}{7} = 0.142857\dots, \quad \frac{1}{9} = 0.111\dots$$

なので、求める分母は、7…(答)

(2) Xは3個の数字の循環なので、分母が「999」の分数で表すことができます。

999を素因数分解すると、

$$999 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$$

となります。このことから、999の約数で二桁の整数は、

(27, 37)

の2数で、Xは $\frac{\square}{27}$ か $\frac{\square}{37}$ であることがわかります。

① Xの分母を27と仮定した場合

$X + Y = Z$ より $Y = Z - X$ 、また(1)より $Z = \frac{1}{7}$ だから、

$$Y = \frac{1}{7} - \frac{\square}{27} = \frac{27 - \square \times 7}{189}$$

また、 $27 - \square \times 7$ が一桁の整数になるには、

$$\square = 3$$

ところが、このときYは、

$$\frac{27 - 3 \times 7}{189} = \frac{6}{189} = \frac{2}{63}$$

となり、Yの分母が三桁ではないので、Xの分母は27ではないことがわかります。

② Xの分母を37と仮定した場合

$$Y = \frac{1}{7} - \frac{\square}{37} = \frac{37 - \square \times 7}{259}$$

また、 $37 - \square \times 7$ が一桁の整数になるには、

$$\square = 4, 5$$

それぞれのとき、Yは、

$$\frac{37 - 4 \times 7}{259} = \frac{9}{259}, \quad \frac{37 - 5 \times 7}{259} = \frac{2}{259}$$

となり、どちらも題意を満たしています。したがってXは、

$$\frac{4}{37} = \frac{108}{999} = 0.108108\dots, \quad \frac{5}{37} = \frac{135}{999} = 0.135135\dots$$

(答) 0.108, 0.135